

Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli - Riccati

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (MSc)

Άσκηση 1

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $y' = y^2$

(ii) $y' \sqrt{y} - 2xy^{3/2} = 4xy \quad (y > 0)$

Στην (i) για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδική λύση y τέτοια ώστε $y(0) = a$;

Άσκηση 2

Να λυθεί το π.α.τ

$$xy' + y - xy^3, \quad y(1) = -1$$

και να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζονται οι λύσεις του.

Άσκηση 3

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$3y' + y = (1 - 2x)y^4, \quad x \geq 0$$

- (i) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση.
- (ii) Εξετάστε αν υπάρχουν λύσεις ορισμένες στο $[0, +\infty)$.
- (iii) Εξετάστε αν υπάρχουν μονότονες λύσεις στο $[0, +\infty)$. Αν υπάρχουν, να δώσετε μια γνησίως φθίνουσα και μια γνησίως αύξουσα λύση.
- (iv) Εξετάστε αν υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 4

Δίνεται το π.α.τ

$$\frac{1}{\cos^2 y} y'(x) + x \tan y + x \tan^3 y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

- (i) Να λύσετε το παραπάνω π.α.τ
- (ii) Να δείξετε ότι κάθε λύση του π.α.τ τείνει προς το 0, όταν το x τείνει προς το $+\infty$.

Άσκηση 5

Να προσδιοριστεί η σταθερά k ώστε η συνάρτηση $y_1 = kx$ να είναι μερική λύση της εξίσωσης:

$$y' + 8xy^2 - 4x(4x + 1)y + 8x^3 + 4x^2 - 1 = 0$$

. Στη συνέχεια

- (i) να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης
- (ii) να εξετάσετε αν όλες οι λύσεις της ορίζονται στο \mathbb{R} .
- (iii) να δείξετε ότι δεν υπάρχουν φραγμένες λύσεις της εξίσωσης στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση

$$y' - 6y + (t^{1/3} + 1)y^2 + g(t) = 0, \quad t \geq 0$$

η οποία έχει μια λύση την $y_1(t) = \frac{3}{t^{4/3} + 1}$, $t \geq 0$. Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών:

- (i) Κάθε λύση της εξίσωσης έχει πεπερασμένο όριο, για $t \rightarrow +\infty$.
- (ii) Υπάρχει λύση y_0 της εξίσωσης η οποία δεν ορίζεται στο $[0, +\infty)$
- (iii) Κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$
- (iv) Κάθε λύση y της εξίσωσης είναι φραγμένη στο $+\infty$ [δηλ. υπάρχει κάποιο $r > 0$ ώστε κάθε y να είναι φραγμένη στο $(r, +\infty)$].
- (v) Δεν υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης στο $+\infty$ [δηλ. λύση y ώστε να είναι ταλαντούμενη σε ένα διάστημα της μορφής $(r, +\infty)$ με $r > 0$].



Only Maths

-Official-